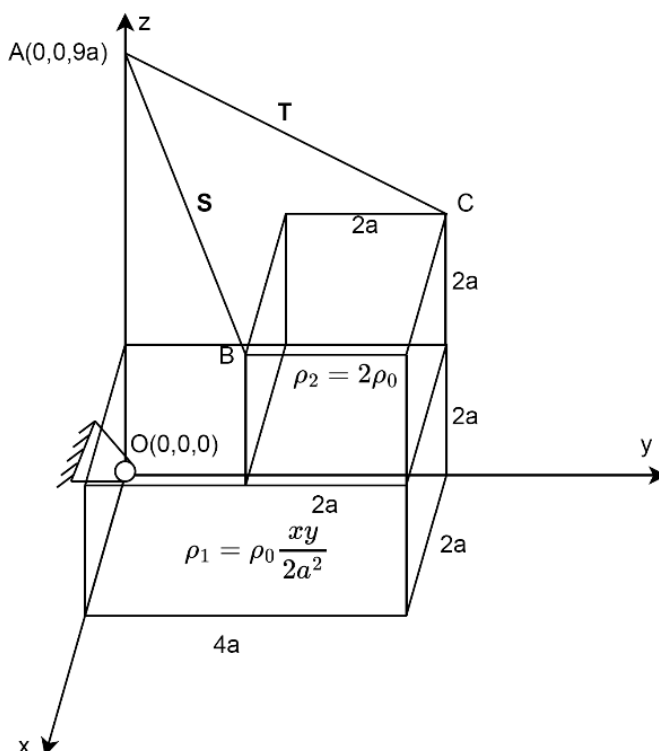




MEHANIKA (kolokvijum)

1. Telo se sastoji iz dva dela: kocke sa ivicom dužine $2a$, koja se nalazi na gornjoj strani tela, čija je gustina materijala $\rho_2 = 2\rho_0$ i kvadra dimenzija $4a \times 2a \times 2a$, koji čini donji deo tela, i čija je gustina $\rho_1(x, y) = \rho_0 \frac{xy}{2a^2}$. Telo je oslonjeno u tački $O(0,0,0)$

o sferni zglobov. U ravnoteži ga održavaju užadi S i T koji su jednim krajem uklješteni u tački $A(0,0,9a)$. Uže S je drugim krajem vezano za telo u tački $B(2a, 2a, 4a)$, a uže T u tački $C(0, 4a, 4a)$. Odrediti koordinate centra mase tela u izabranom koordinatnom sistemu. Napisati jednačine ravnoteže i izračunati sile u užadima S i T, kao i rezultujuću silu reakcije u sfernom zglobov. Gustina je $\rho_0 = 4500 \text{ kg/m}^3$ a dužina $a = 1 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ N/kg}$.



2. Za realizaciju dalekovoda na raspolaganju su provodnici (užad) čiji su parametri: podužna masa $p=1 \text{ kg/m}$, površina poprečnog preseka $A=280 \text{ mm}^2$, maksimalno dozvoljeno naprezanje $\sigma_d=10^8 \text{ Pa}$, modul elastičnosti $E=7,7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, temperaturni koeficijent linearnog širenja $\alpha=18,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Dalekovod se izvodi preko ravnog terena pravom trasom u dužini od 80 km , a na raspolaganju su stubovi visine $H=17 \text{ m}$ (rastojanje od zemlje do tačke vešanja provodnika). Minimalna očekivana temperatura provodnika je -20°C , a maksimalna 60°C . Proračunati:

- Minimalan broj stubova sa kojima se može realizovati ovaj dalekovod tako da rastojanje provodnika od zemlje bude bar 7 m , u celom opsegu promene temperature provodnika, a da pri tom on ne bude mehanički ugrožen.
- Za dalekovod projektovan u prethodnoj tački, proračunati sa kolikom maksimalnom podužnom težinom leda može biti dodatno opterećeno provodnik pri njegovoj temperaturi od -5°C , a da pri tom budu zadovoljeni uslovi u pogledu dozvoljenog mehaničkog opterećenja i rastojanja provodnika od zemlje.
- Proračunati maksimalne sile kojima provodnici deluju na stubove u analiziranom opsegu mogućih stanja provodnika opisanih u prethodnim tačkama. Pretpostaviti da se za svaki stub vezuju po tri identična fazna provodnika.

Kolokvijum traje maksimalno 2 sata.

1.

$$dm_1 = \rho_1(x, y) dV_1 = \rho_0 \frac{xy}{2a^2} dx dy \times 2a = \frac{\rho_0}{a} xy dx dy$$

$$m_1 = \int_{m_1} dm_1 = \int_{y=0}^{4a} \int_{x=0}^{2a} \frac{\rho_0}{a} xy dx dy = 16\rho_0 a^3$$

$$x_{cm1} = \frac{\int x dm_1}{m_1} = \frac{4}{3}a \quad \wedge \quad y_{cm1} = \frac{\int y dm_1}{m_1} = \frac{8}{3}a \quad \wedge \quad z_{cm1} = a$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = 2\rho_0 \times (2a)^3 = 16\rho_0 a^3$$

$$x_{cm2} = a \quad \wedge \quad y_{cm2} = 3a \quad \wedge \quad z_{cm2} = 3a$$

$$(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) = \frac{m_1(x_{cm1}, y_{cm1}, z_{cm1}) + m_2(x_{cm2}, y_{cm2}, z_{cm2})}{m_1 + m_2}$$

$$(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) = \frac{16\rho_0 a^3 \left(\frac{4}{3}a, \frac{8}{3}a, a\right) + 16\rho_0 a^3 (a, 3a, 3a)}{16\rho_0 a^3 + 16\rho_0 a^3} = \left(\frac{7}{6}a, \frac{17}{6}a, 2a\right)$$

$$Q = (m_1 + m_2) \times g = 144\,000 \times 9,81 = 1,41 \times 10^6 \text{ N}$$

$$S_x = -\frac{2}{\sqrt{33}}S \quad T_x = 0$$

$$S_y = -\frac{2}{\sqrt{33}}S \quad T_y = -\frac{4}{\sqrt{41}}T$$

$$S_z = +\frac{5}{\sqrt{33}}S \quad T_z = +\frac{5}{\sqrt{41}}T$$

$$(1): \sum F_x = 0 \Leftrightarrow R_x + S_x = 0;$$

$$(2): \sum F_y = 0 \Leftrightarrow R_y + S_y + T_y = 0;$$

$$(3): \sum F_z = 0 \Leftrightarrow R_z + S_z + T_z - Q = 0;$$

$$(4): \sum M_{Ox} = 0 \Leftrightarrow -S_y \times 4a + S_z \times 2a - T_y \times 4a + T_z \times 4a - Q \times y_{cm} = 0;$$

$$(5): \sum M_{Oy} = 0 \Leftrightarrow +S_x \times 4a - S_z \times 2a + Q \times x_{cm} = 0;$$

$$(5) \Rightarrow S = \frac{7\sqrt{33}}{108}Q = 525,97 \text{ kN}$$

$$(4) \Rightarrow T = \frac{10\sqrt{41}}{216}Q = 418,76 \text{ kN}$$

$$(1) \Rightarrow R_x = \frac{7}{54}Q = 183,12 \text{ kN}$$

$$(2) \Rightarrow R_y = \frac{17}{54}Q = 444,72 \text{ kN}$$

$$(3) \Rightarrow R_z = \frac{4}{9}Q = 627,84 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 790,88 \text{ kN}$$

2.

Proračun zapreminske težine užadi:

$$\gamma_0 = \frac{q_0}{A} = \frac{p \cdot g}{A} = \frac{1 \cdot 10}{280 \cdot 10^{-6}} = 3,57 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

a) Trasa će biti realizovana sa minimalnim brojem stubova ukoliko za svaki raspon važi:

1) Pri temperaturi $t = -20^\circ\text{C}$ naprezanje u provodniku je jednako maksimalno dozvoljenom

$$\sigma_{-20^\circ\text{C}} = \sigma_d = 1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

2) Pri temperaturi $t = +60^\circ\text{C}$ ugib je jednak maksimalno dozvoljenom $f_{\max} = H - D_{\min} = 10 \text{ m}$.

$$f_{+60^\circ\text{C}}^3 - f_{+60^\circ\text{C}} \cdot \frac{3}{2} l'^2 \cdot \left[\frac{\gamma^2 l'^2}{6\sigma_{-20^\circ\text{C}}^2} + \alpha(t_{+60^\circ\text{C}} - t_{-20^\circ\text{C}}) - \frac{\sigma_{-20^\circ\text{C}}}{E} \right] - \frac{3}{4} \frac{\gamma_0 l'^4}{E} = 0$$

$$10^3 - 10 \times \frac{3}{2} \times l'^2 \times \left[\frac{(3,57 \cdot 10^4)^2 \times l'^2}{6 \times (1 \cdot 10^8)^2} + 18,9 \cdot 10^{-6} \times (60 + 20) - \frac{1 \cdot 10^8}{7,7 \cdot 10^{10}} \right] - \frac{3}{4} \frac{3,57 \cdot 10^4 \times l'^4}{7,7 \cdot 10^{10}} = 0$$

$$1000 - 3,2 \cdot 10^{-3} \times l'^2 - 6,663 \cdot 10^{-7} \times l'^4 = 0 \Rightarrow l' = 190,82 \text{ m} \Rightarrow 2l' = 381,64 \text{ m}$$

$$N = \frac{80000}{2l'} + 1 = 210,62 \approx 211$$

b) Stvarna dužina raspona:

$$2l = \frac{80000}{N - 1} = 380,952 \text{ m}$$

Od trenutka usvajanja stvarne dužine raspona, na dalje ne važi pretpostavka da su ispunjena oba uslova 1) i 2) iz prethodne tačke. Potrebno je opredeliti se za ispunjenje jednog uslova, dok će drugi biti blizak svojoj granici ali je neće preći:

1) Opcija „kraće uže“ podrazumeva ispunjenje uslova 1). Tada će naprezanje na $t = -20^\circ\text{C}$ biti

jednako $\sigma_{-20^\circ\text{C}} = \sigma_d = 1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ dok će ugib na $t = +60^\circ\text{C}$ biti nešto manji od $f_{\max} = 10 \text{ m}$.

2) Opcija „duže uže“ podrazumeva ispunjenje uslova 2). Tada će ugib na $t = +60^\circ\text{C}$ biti jednak

$f_{\max} = 10 \text{ m}$ dok će naprezanje na $t = -20^\circ\text{C}$ biti nešto manje od $\sigma_d = 1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$.

Uže će moći prihvatiti veću podužnu težinu leda pri opciji „duže uže“.

Proračun prirodne dužine nezategnutog užeta pri temperaturi $t = -5^\circ\text{C}$:

$$f_{+60^\circ\text{C}}^3 - \frac{3}{4} l(2L_0 - 2l) \cdot f_{+60^\circ\text{C}} - \frac{3}{4} \frac{\gamma_0 l^4}{E} = 0$$

$$2L_0 - 2l|_{+60^\circ\text{C}} = \frac{4}{3} \frac{f_{+60^\circ\text{C}}^3 - \frac{3}{4} \frac{\gamma_0 l^4}{E}}{l \cdot f_{+60^\circ\text{C}}} = \frac{4}{3} \frac{10^3 - \frac{3}{4} \frac{3,57 \cdot 10^4 \times 190,476^4}{7,7 \cdot 10^{10}}}{190,476 \cdot 10} = +0,3796 \text{ m}$$

$$2L_0|_{+60^\circ\text{C}} = 381,3320 \text{ m}$$

$$2L_0|_{-5^\circ\text{C}} = 2L_0|_{+60^\circ\text{C}} \times [1 + \alpha \times (t_{-5^\circ\text{C}} - t_{+60^\circ\text{C}})] = 381,3320 \times [1 + 18,9 \cdot 10^{-6} \times (-5 - 60)] = 380,8635 \text{ m}$$

Pri temperaturi $t = -5^\circ\text{C}$ uz dodatno opterećenje usled leda važi:

$$f_{-5^\circ\text{C}+L}^3 - \frac{3}{4} l(2L_0|_{-5^\circ\text{C}} - 2l) \cdot f_{-5^\circ\text{C}+L} - \frac{3}{4} \frac{\gamma_{ekv} l^4}{E} = 0$$

$$f_{-5^\circ\text{C}+L} = \frac{\gamma_{ekv} l^2}{2\sigma_d}$$

$$\left(\frac{\gamma_{ekv} l^2}{2\sigma_d} \right)^3 - \frac{3}{4} l(2L_0|_{-5^\circ\text{C}} - 2l) \cdot \left(\frac{\gamma_{ekv} l^2}{2\sigma_d} \right) - \frac{3}{4} \frac{\gamma_{ekv} l^4}{E} = 0$$

$$\gamma_{ekv} = \sqrt{\frac{6\sigma_d^3}{l^3} \left(\frac{2L_0|_{-5^\circ\text{C}} - 2l}{2\sigma_d} + \frac{l}{E} \right)} = \sqrt{\frac{6 \cdot (10^8)^3}{190,476^3} \left(\frac{380,8635 - 380,952}{2 \cdot 10^8} + \frac{190,476}{7,7 \cdot 10^{10}} \right)} = 4,2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Maksimalno podužno opterećenje usled leda pri temperaturi $t = -5^{\circ}\text{C}$:

$$\gamma_{ekv} = \frac{q_{ekv}}{A} = \frac{q_0 + q_L}{A} = \frac{\gamma_0 A + q_L}{A} = \gamma_0 + \frac{q_L}{A}$$

$$q_L = (\gamma_{ekv} - \gamma_0) \times A = (4,2 \cdot 10^4 - 3,57 \cdot 10^4) \times 280 \cdot 10^{-6} = 1,764 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Provera ugiba na $t = -5^{\circ}\text{C}$ uz dodatnu težinu usled leda:

$$f_{-5^{\circ}\text{C}+L} = \frac{\gamma_{ekv} l^2}{2\sigma_d} = \frac{4,2 \cdot 10^4 \cdot 190,476^2}{2 \cdot 10^8} = 7,619 \text{ m} < f_{\max}$$

- c) Stubovi unutar trase trpe samo aksijalnu silu, koja je najveća pri temperaturi $t = -5^{\circ}\text{C}$ i jednaka je zbiru sopstvene težine provodnika i težine leda:

$$V_{2,\dots,N-1} = n_f \cdot \gamma_{ekv} \cdot A \cdot 2L \cong n_f \cdot \gamma_{ekv} \cdot A \cdot 2l = 3 \cdot 4,2 \cdot 10^4 \cdot 280 \cdot 10^{-6} \cdot 380,952 = 13,44 \text{ kN}$$

$$H_{2,\dots,N-1} = 0$$

Početni i krajnji stubovi trase, pri istom stanju, pored aksijalne sile trpe i transferzalnu silu:

$$V_1 = V_N = \frac{1}{2} V_{2,\dots,N-1} = 6,72 \text{ kN}$$

$$H_1 = H_N = n_f \cdot \sigma_d \cdot A = 3 \cdot 1 \cdot 10^8 \cdot 280 \cdot 10^{-6} = 84 \text{ kN}$$